

LA MATEMÁTICA EN LA GRECIA ANTIGUA

1. Antecedentes:

La matemática surge desde la aparición del hombre como sujeto pensante, es decir, desde la evolución de su esquema mental. Inicialmente la matemática practicada por los hombres primitivos se debía a la necesidad de alimentación, recolección o caza. Sea para contabilizar o hacer diferencias en la repartición, la matemática entonces entraba a jugar un papel importante en su vida cotidiana.

Los datos históricos que tenemos fehacientemente consideran a Mesopotámica (Babilonia, incluyendo los Sumerios y Acadios) y Egipto como las culturas con un avanzado conocimiento del número y la forma. Cabe mencionar que el conocimiento de estas culturas eran una consecuencia de sus antecesores, una especie de herencia. La tentativa de tiempo varía, están en duda. Se especula que en Egipto se inició en 424 +/- 200 años a.C. (fecha más remota) y 2781 a.C. (fecha última), también señalan 5700 a.C. para Mesopotámica. Ambas culturas se centran en el estudio de los calendarios justificándolos con nociones de astronomía.¹

1.1. Aparición de las matemáticas

Los pueblos generan su historia, en su historia se encuentran indefectiblemente estudios de matemáticas. Estas matemáticas tienen un origen similar al lenguaje y el arte, de los cuales conjeturamos mediante las características de los hombres primitivos.

¹ Bell, E.T. (1996). Historia de la matemática. México: Fondo de Cultura Económica. Pág. 13.

La matemática aparece inicialmente con la Aritmética, generalizado por el Álgebra, ambos estudian el número en su forma aplicativa y general, respectivamente. La Geometría nace como consecuencia del estudio de la forma, que a su vez generará en el siglo XVII corrientes de estudio, como las conocidas geometrías no eulideanas.

El sentido de la forma espacial y del número no es un privilegio exclusivo del hombre. Mucho de los animales demuestra un sentido rudimentario del número, en tanto que otros nos asombran con sus apreciaciones de la forma. Recordemos a las ratas de laboratorio que encuentran la salida de los laberintos inventados por los psicólogos y aprueban difíciles exámenes de topología. Lo que resulta evidente es que el ser humano tiene falencias en ese campo.

Las culturas estudian los conocimientos matemáticos de acuerdo a su concepción de matemática (filosofía de la matemática), y también mediante esa concepción aprueban lo que debe ser llamado matemática. Así por ejemplo, a inicios de las grandes civilizaciones antiguas (conocidas) el enfoque de la matemática eran dos: empirismo y deduccionismo.

1.1.1. **Empirismo versus deduccionismo**

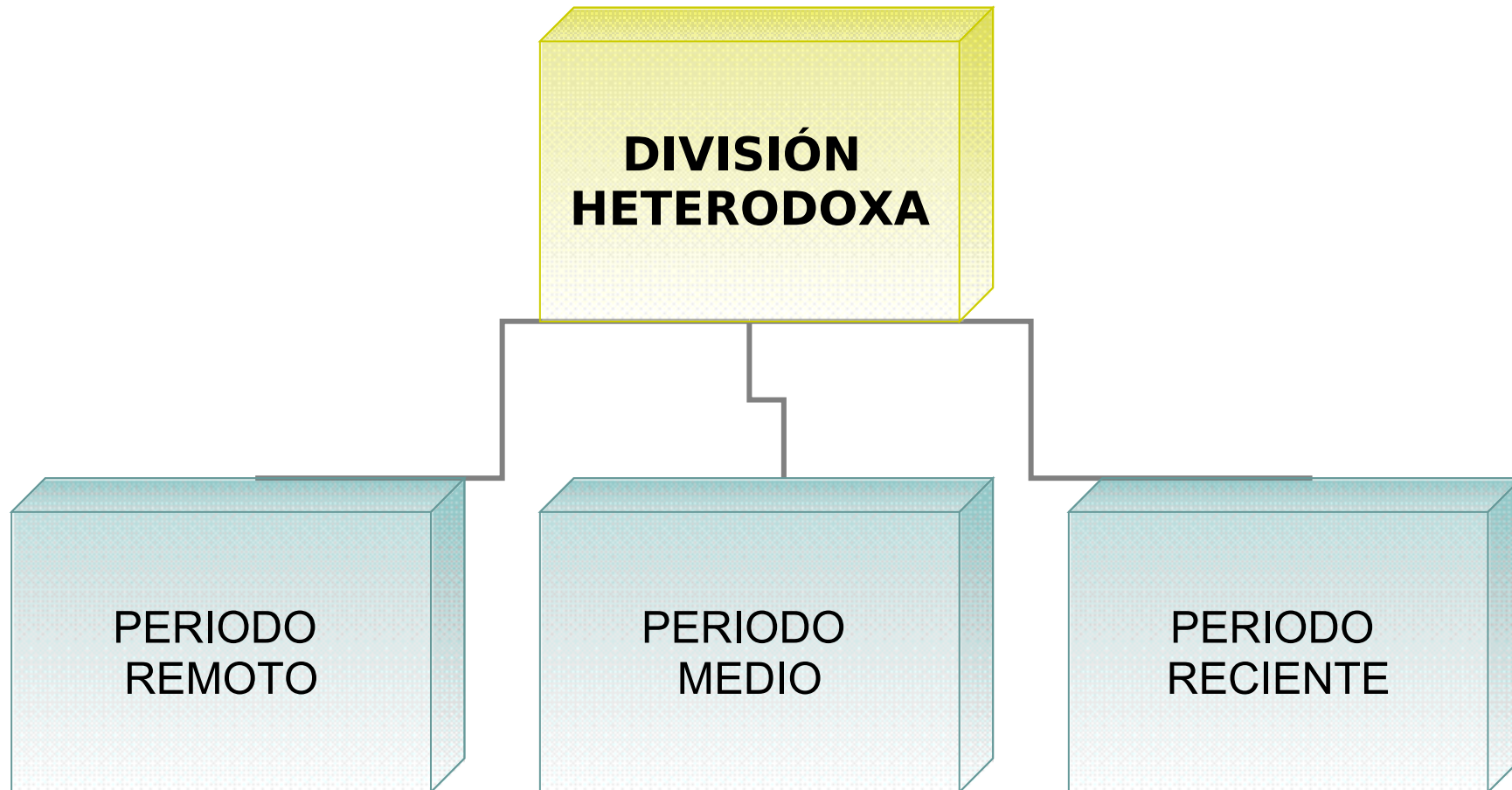
El empirismo se desarrollo en Babilonia y Egipto, mientras que el deduccionismo en Grecia. Debemos resaltar que son referencias conocidas, tal vez hayan otras culturas que las desarrollasen, pero que no tenemos documentos probatorios, solo son especulaciones. Presentamos en un cuadro comparativo las diferencias de ambos.



Empirismo práctico.	Deduccionismo de la geometría.
En Babilonia y Egipto	En Grecia
<ul style="list-style-type: none"> • Precedió a las matemáticas formales. • No aplican el razonamiento deductivo de forma conciente. • Su razonamiento es inductivo (práctico). • Sus conocimientos no eran incorporados hasta encontrar su demostración • Sienten la necesidad de una “necesaria demostración”. • La demostración está supeditada a la cultura. • La técnica de la agrimensura utilizaba cálculos matemáticos simples 	<ul style="list-style-type: none"> • Inician las matemáticas formales. • Utilizan el método deductivo (razonamiento deductivo). • El razonamiento deductivo se caracteriza por su formalidad y practicidad. • Abstraen la experiencia práctica. (EUCLIDES) • La abstracción genera utilidad, generalidad y formalidad. • Heredamos de EUCLIDES la insistencia en la demostración deductiva. • EUCLIDES tuvo errores en su demostración, que no fueron alertados sino en un tiempo más próximo a nuestra era.

1.1.2. Desarrollo de la matemática

Presentamos dos tipos de división del conocimiento matemático.

1.1.2.1. División Heterodoxa: Considerada por muchos teóricos como la mejor)



PERIODO REMOTO	PERIODO MEDIO	PERIODO RECIENTE
Extensión: Primeros tiempo – 1637 d.C.	Extensión: 1638 d.C. – 1800 d.C.	Extensión: 1801 d.C. – Presente
		
<p>Se debe a que en 1637 nace la geometría analítica (publicación de la obra maestra de René Descartes).</p>	<ul style="list-style-type: none"> ● El Cálculo hace su aparición gracias a Newton y Leibniz. ● Dinámica de Galileo y Newton. ● Se origina el tratamiento abstracto de la matemática. ● Lagrange piensa que la matemática se agotó en su era. 	<ul style="list-style-type: none"> ● Se adecua el desarrollo del pensamiento abstracto. ● Publicación en 1801 de la obra de Gauss. ● En 1821 se presenta Cauchy con el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral ● Desarrollo de las geometrías no Euclidianas

1.1.2.2.División Convencional: Consta de siete periodos.

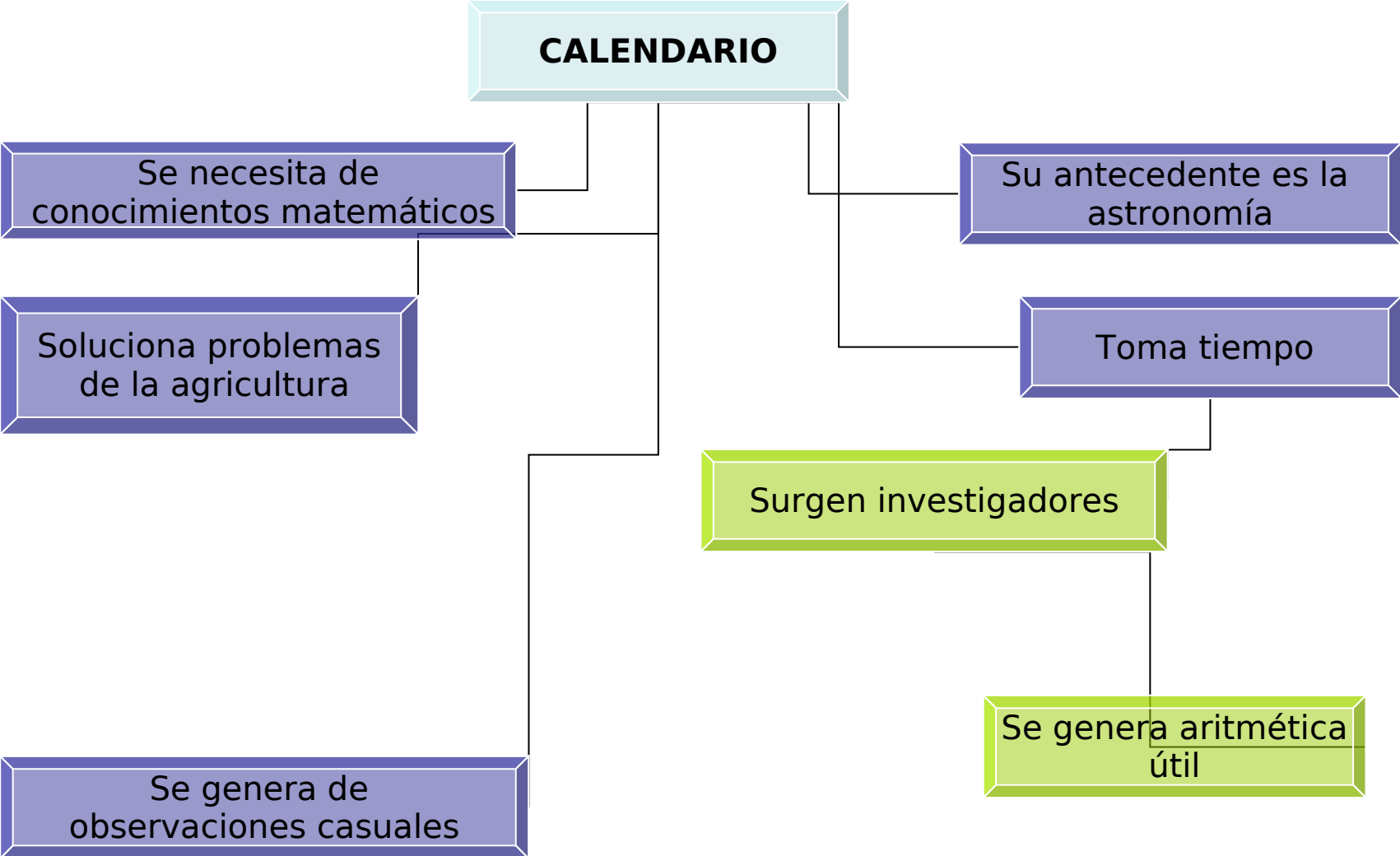
1. Primeros tiempos a la antigua Babilonia y Egipto, inclusive.
2. La contribución griega, desde cerca del año 600 a.C., hasta aproximadamente el año 300 d.C. Siendo el mejor en los siglos IV y III a.C.
3. Los pueblos orientales y semíticos (indio, chino, musulmán, persa, judío, etc.) Junto con los griegos contribuyeron al Renacimiento.
4. Europa durante el Renacimiento y la Reforma, aproximadamente los siglos XV y XVI.
5. Los siglos XVII y XVIII, época ilustre de las matemáticas modernas puras, así como la ciencia moderna.
6. El siglo XIX.
7. El siglo XX.

2. EL PREÁMBULO GRIEGO: (EGIPTO – MESOPOTAMIA)

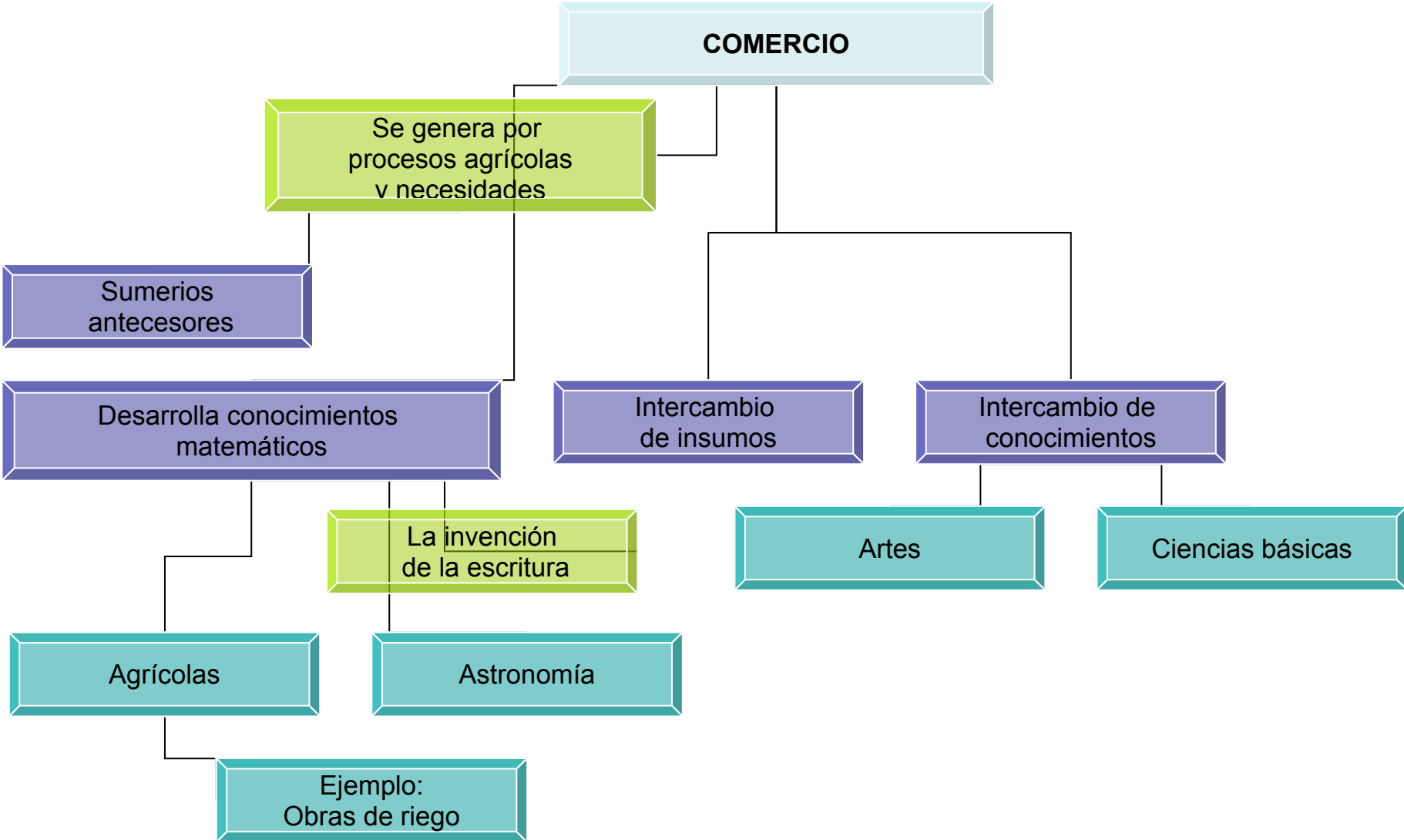
2.1.Necesidad de la matemática

La base de la civilización Egipcia y Mesopotámica fue la agricultura. Los pobladores de estas grandes ciudades sentían la necesidad de “controlar” el pronóstico del tiempo, tal vez por experiencia, pues cada desastre que asolaba a sus tierras los dejaba con más de un problema.

Entonces se puede hablar de los calendarios como solución a ellos, como en Mesopotámica y Egipto. Relacionemos dicha solución con la matemática:



La Matemática en Grecia Antigua



La Matemática en Grecia Antigua

A continuación hacemos un cuadro comparativo entre la cultura Babilónica y Egipcia acerca del desarrollo de los conocimientos matemáticos.

2.2. Aparición de la aritmética

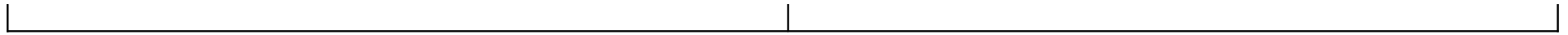
Babilonia (incluido los Sumerios hacia 2500 a.C.)	En los Egipcios (hacia 3500 a.C.)
<ul style="list-style-type: none"> • Se familiarizaron con los pesos y medidas, generado por el comercio. • Crean el sistema de numeración sexagesimal (Sumerios transmiten a los Babilonios). • Las huellas de este sistema perduran en la actualidad, como en el cálculo del tiempo y en la división de la circunferencia en 6x60 grados. 	<ul style="list-style-type: none"> • Se usa cifras de millar para contabilizar muertos u cosechas. • Usaron el sistema decimal no posicional. • Su aritmética de 1650 era apta para la adición, sustracción, multiplicación y división, aplicados a problemas sencillos. • Las divisiones e efectuaban por medio de las “fracciones continuas”, como expresar m/n, $m > 1$ como una suma de fracciones unitarias. <p>Ejemplo:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\frac{2}{97} = \frac{1}{50} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$ </div> <p>Símil de una tabla de logaritmos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Su aritmética se caracterizó por la comprobación ocasional de sus resultados. (Indicios de necesidad de la demostración) • Algunos conocimientos aritméticos estaban adelantados para su época, como en notación actual sería un sistema de ecuaciones. La falta de simbolización dificultaba el trabajo.

2.3. Aparición del álgebra

De los registros de los Babilonios de hacia 2000 a.C.	En Egipto
<ul style="list-style-type: none"> • Se observa la falta de demostración. • El álgebra se desarrolla por medio de reglas y sin símbolos “algebraicos”. • Los problemas eran particulares y no contenían una universalidad. <p>Expresadas en términos actuales las ecuaciones del tipo:</p> $x^3 + px^2 + q = 0$ <p>Se reduce a su forma normal:</p> $y^3 + y^2 = r / y = \frac{x}{p} \wedge r = -\frac{q}{p^3}$ <p>Que se origina multiplicando a la ecuación original por $\frac{1}{p^3}$</p> <ul style="list-style-type: none"> * Si el valor resultante de r es positivo, * El valor de Y, y por consiguiente de X * Puede deducirse de valores tabulados de, $n^3 + n^2$ siempre que esté en las tablas. 	<ul style="list-style-type: none"> • No se desarrollo en gran magnitud, pues no hay muestras de ello. • Estaban menos adelantados que los Babilonios. • En 1850 y 1650 a.C. se resolvía ecuaciones de cualquier grado por tanteo, o por lo que se llamaría falsa suposición.

2.4.Desarrollo de la geometría

En Babilonia	En Egipto
<ul style="list-style-type: none"> • Los conocimientos de hacia 2200 a.C. carecían de demostración. • Se aplicaba reglas para hallar áreas como las del triángulo, rectángulo, triángulo recto, triángulo isósceles entre otras figuras. • Toman el valor de “pi” igual a 3. • Se resolvían problemas aplicados a la vida cotidiana. • Conocían diversos teoremas de geometría como: <p><i>El ángulo en un semicírculo es u ángulo recto”. (Demostrado por Tales hacia el año 500 a.C.)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • El teorema pitagórico $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$ <p>en el que c, a y b son los lados de un triángulo rectángulo, para ciertos valores numéricos como 20, 16, 12 y 17, 15, 8.</p> <ul style="list-style-type: none"> • El teorema <i>“los lados de los ángulos correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales”.</i> • Esto enmarcado dentro de los orígenes del análisis matemático. 	<ul style="list-style-type: none"> • Algunos señalan que no aportaron mucho a esta ciencia. • Sus obras magnas, las pirámides, se construía en base a la fuerza de mano de obra, más que cuestiones matemáticas y físicas. • Calculaban el área de cualquier triángulo mediante la regla $\frac{1}{2}$ base por la altura. • Existió un “matemático místico”, este egipcio descubrió o creyó descubrir el resultado más extraordinario en la geometría anterior a los griegos. • Dio un ejemplo numérico de la formula correcta $\boxed{\frac{h(a^2 + ab + b^2)}{3}}$ <ul style="list-style-type: none"> • Para el volumen de un tronco de pirámide cuadrada, siendo h la altura; a y b, respectivamente los lados de la base superior e inferior.



2.5. Aportaciones de Babilonia y Egipto

Aportaciones de Babilonia y Egipto (Resumen)	
Babilonia	Egipto
<ul style="list-style-type: none">● Nos dejaron el horóscopo zodiacal de 360 partes.● Heredamos la división del tiempo en 60 minutos, 60 segundos.● Utilizan el sistema posicional.● Tablillas con problemas y ternas pitagóricas.	<ul style="list-style-type: none">● El papiro de Rhin con más de 100 problemas.● La pirámide de Keops tiene la propiedad de que <i>“el cuadrado de su altura coincide con el área de una de sus caras”</i>.● Lo anterior genera el número de ORO.

3. La matemática griega

3.1. La cultura griega

La historia de Grecia, durante sus primeros años, desarrolló una de las más grandes civilizaciones de la Antigüedad, poseedora de una rica cultura.

Vista por muchos como la cuna de la civilización occidental, Grecia tiene una larga y rica historia durante la cual extendió su influencia sobre tres continentes.

Las costas del mar Egeo vieron el surgimiento de las primeras civilizaciones europeas, la minoica y la micénica. Después de su desaparición, volvió a resurgir otra alrededor del 800 a.C.. Esta última estableció colonias desde sus *polis* (ciudades-estado) a lo largo de todo el mediterráneo, resistió las invasiones de Persia y su cultura sería la base de la civilización helenística que sucedió al imperio de Alejandro Magno.

Fue conquistada por Roma en 168 a.C. aunque la superioridad de la cultura griega modificó profundamente la romana. De hecho, en la parte oriental del imperio la cultura y el griego siguieron siendo más influyentes.

La Matemática en Grecia Antigua

El Imperio Griego Medieval se constituye como uno de los imperios más grandes de la historia de Europa; abarca desde el Mar Adriático y el Sur de Italia hasta Oriente Medio; Constantinopla se erige como la Segunda Roma y como el centro de la civilización heredera de las antiguas Grecia y Roma. El Imperio Griego de Bizancio también es uno de los imperios más longevos de la Historia: dura casi 1.000 años, desde el siglo V hasta el siglo XV.



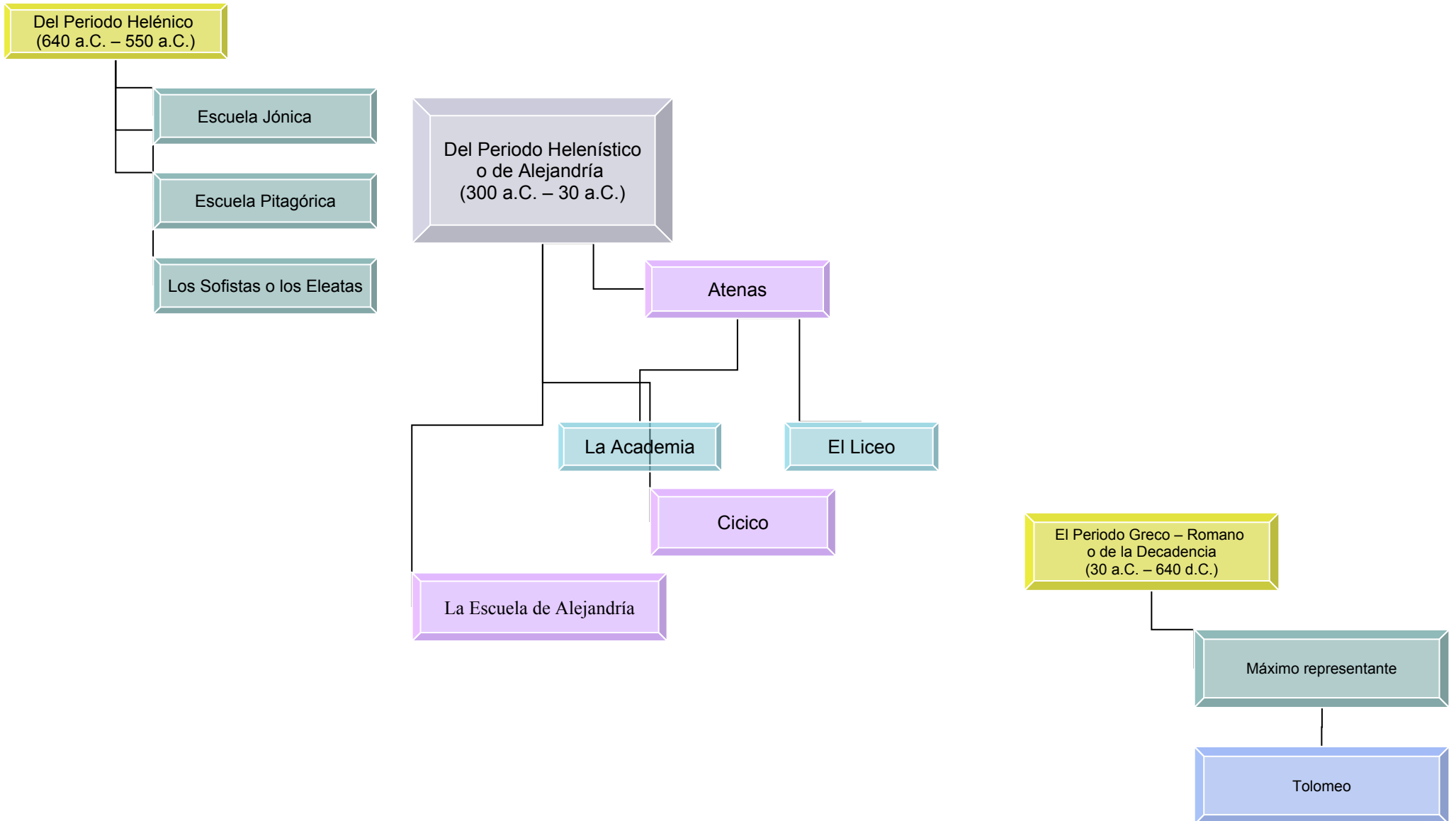
Gráfico 1. Mapa de la Grecia antigua

3.2.La división de la cultura griega

Periodos	Hechos relevantes
Helénico	<ul style="list-style-type: none">• Desde los primeros días hasta la muerte de Alejandro el Grande, muerte de Aristóteles y la culminación del Siglo de Pericles.• Se caracteriza por las constantes guerras.• Se desarrolla la matemática en conexión con la filosofía
Helenístico	<ul style="list-style-type: none">• Hasta principios de la era cristiana.• La cultura griega llega un exorbitante esplendor.• La matemática obtiene su autonomía de la filosofía.• Los más importantes centros matemáticos de esa época son:<ul style="list-style-type: none">▪ Alejandría, Perga y Rodas.• Lo máximos exponentes son Euclides, Arquímedes y Apolonio.
Greco – Romano o de la decadencia	<ul style="list-style-type: none">• Desde los primeros siglos de la era cristiana a la conquista romana.• La matemática se centra a los epígonos y comentaristas

3.3. Cronología de las escuelas matemáticas griegas.

Presentamos gráficamente las diferentes escuelas:



Desarrollo de las Escuelas:

Escuela Jónica		
Hechos relevantes	Máximo representante	Aportes
<ul style="list-style-type: none"> • Se guía por la filosofía naturalista. • “Todo está lleno de Dioses” • “ El agua es principio de todas las cosas” • Tales de Mileto (624 – 550) fue su máximo representante. • Entre otros miembros estaban: <ul style="list-style-type: none"> ○ Anaxímenes y Anaximandro. • Fundaron las matemáticas como sistema deductivo. • Matematizaron los fenómenos naturales. 	<p>Tales de Mileto</p> <ul style="list-style-type: none"> • Nació en Mileto alrededor del año 624 a.C. y murió en la misma ciudad alrededor del año 545 a.C. • Se le conoce como el padre de las matemáticas, astronomía y la filosofía griega. • Se cuenta que pronosticó un eclipse lunar (probablemente el del 28 de mayo del 585 a.C.) fue considerado como uno de los Siete Sabios de Grecia. • Se le atribuye los siguientes descubrimientos: 	<ul style="list-style-type: none"> • “El ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto”. • “Lo ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales”. • “Si dos rectas se cortan, los ángulos opuestos por el vértice son iguales”. • “Todo diámetro divide al círculo en dos partes iguales”. • “Toda recta paralela a uno de los dos lados de un triángulo divide a los otros dos en partes proporcionales”.

Graficando:



Gráfico 2. Aportes de Tales

¿Cómo logró medir la pirámide?

“El proceso consistía en levantar un bastón en el extremo de la sombra proyectada por la pirámide y habiendo formado – de este modo – dos triángulos con los rayos del sol, mostrase que la pirámide está con el bastón en la misma razón que la sombra de la pirámide está con la sombra del bastón”.

Gráficamente

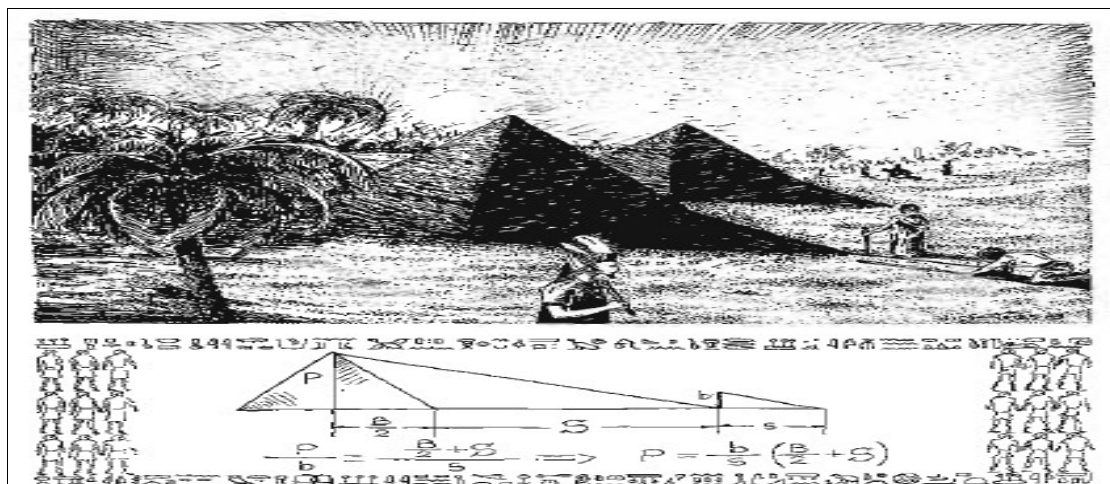
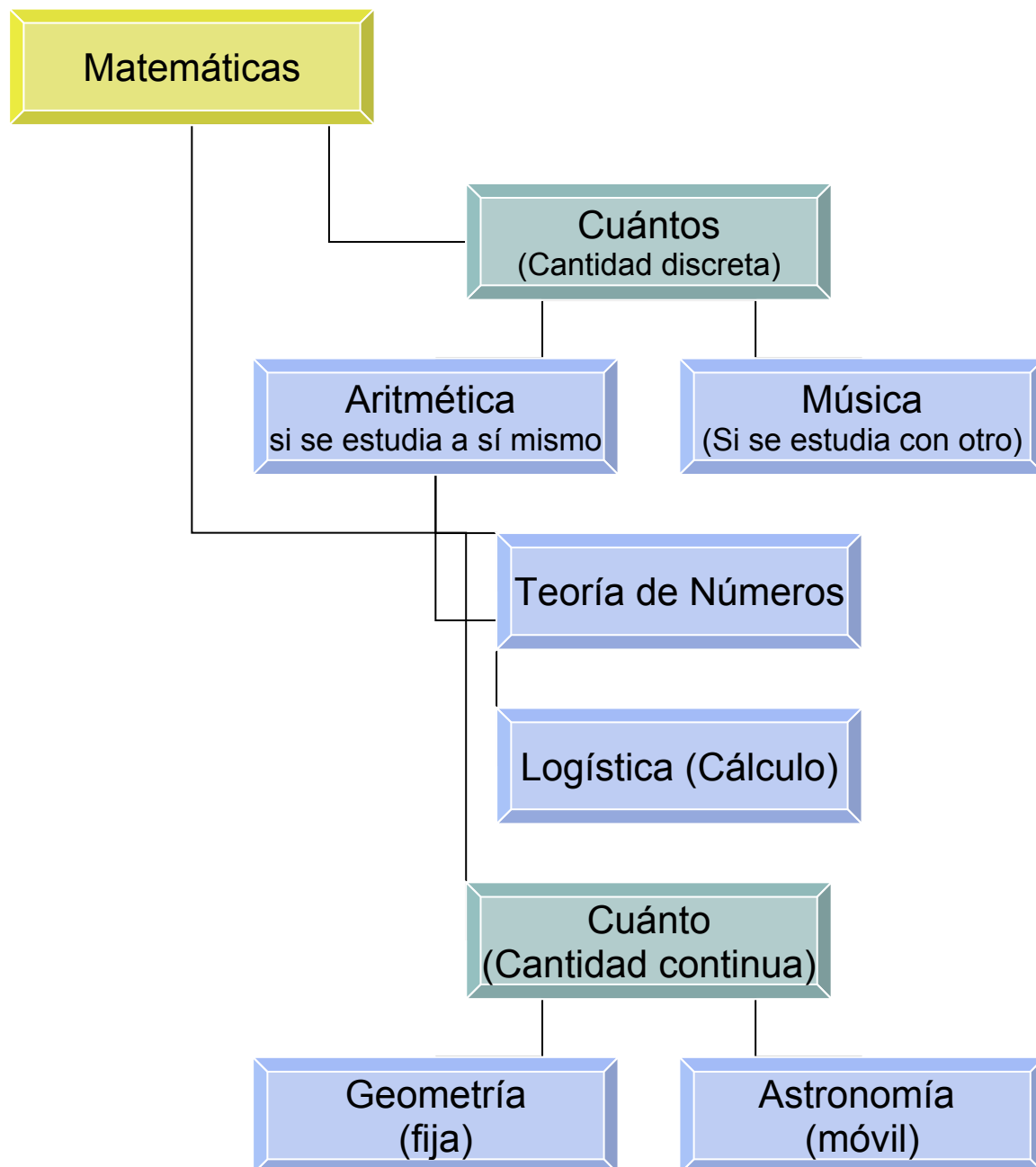


Gráfico 3. Aplicando geometría

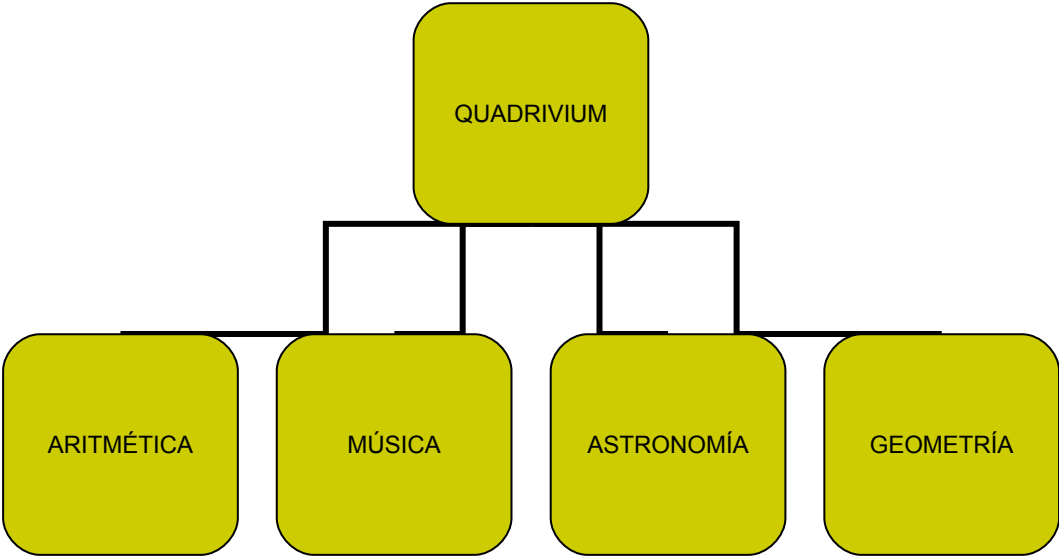
La Matemática en Grecia Antigua

Escuela Pitagórica		
Hechos relevantes	Máximo representante	Aportes
<ul style="list-style-type: none"> • Secta filosófica, científica y religiosa. <p>“El número es principio de todas las cosas”</p> <ul style="list-style-type: none"> • Se funda en Crotona (Italia). Su máximo exponente es Pitágoras de Samos. • Relacionan la música con la matemática. • Matematizan fenómenos naturales. • Fundan las matemáticas como sistema deductivo. <p>Los pitagóricos hacen de la matemática una ciencia por excelencia y hacen su primera división (ver gráfico)</p>	<p>Pitágoras de Samos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Nació en la isla de Samos, alrededor del año 570 a.C. y muere por el año 500 a.C. Sobre su vida se sabe más de leyenda que realidad, es confusa. • De joven se instala en Crotona y funda su escuela. Entre sus discípulos se encontraba Teano, con la que se casó. 	<p>Dividieron los números naturales en pares e impares (femenino y masculino, respectivamente).</p> <ul style="list-style-type: none"> • Dividen la Aritmética como ciencia. • Inventan la denominación de números amigos y números perfectos. • Conocían las proporciones aritméticas, geométricas y armónicas, así como las medias aritméticas, geométricas y armónicas.

División de la matemática por los pitagóricos



El Quadrivium, materias de enseñanza designada por los pitagóricos, usada hasta mediados de la edad media



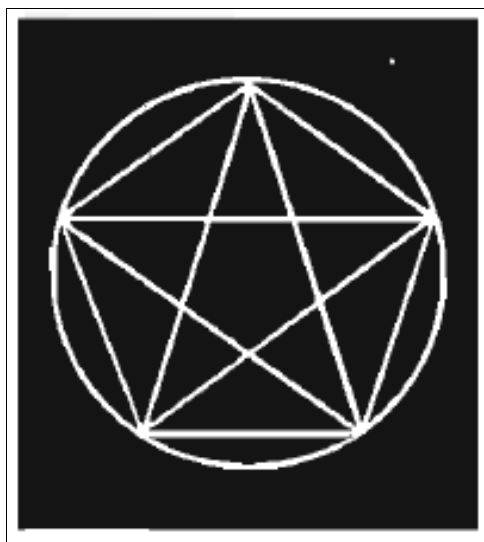


Gráfico 4. Símbolo de la escuela pitagórica

$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 \implies 28$ ES PERFECTO
 $8 > 1 + 2 + 4 \implies 8$ ES DEFECTUOSO
 $12 < 1 + 2 + 3 + 4 + 6 \implies 12$ ES ABUNDANTE

NÚMERO	PARTES ALÍCUOTAS
284	1, 2, 4, 71, 142
220	1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110

$284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$
 $220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$

$\implies 284$ Y 220 SON NÚMEROS AMIGOS

Gráfico 5. Aportes de los pitagóricos

$$a, b, c \left\{ \begin{array}{l} a - b = b - c, \text{ MEDIA ARITMÉTICA} \\ \frac{a}{b} = \frac{b}{c}, \text{ MEDIA GEOMÉTRICA} \\ \frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}, \text{ MEDIA ARMÓNICA} \end{array} \right.$$

Gráfico 6. Relaciones encontradas por los pitagóricos

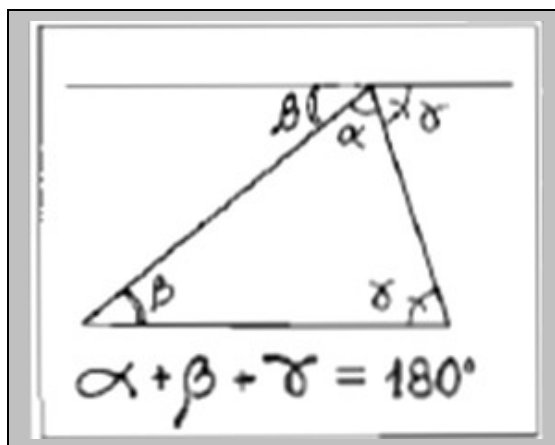


Gráfico 7. Relaciones en el triángulo

Escuela Eleática		
Hechos relevantes	Máximo representante	Aportes

<p>En el siglo V a.C., Parménides fundó una escuela de filosofía en Elea, colonia griega en la península Itálica (Magna Grecia).</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Se sabe poco de su vida, sin embargo sus aportes ayudaron bastante al desarrollo de la matemática. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Suma de puntos. 2. El tiempo como suma de instantes. 3. Movimiento como suma de pasajes de un lugar a otro.
<p>Parménides adoptó una actitud opuesta a la de Heráclito en la relación entre estabilidad y cambio y mantuvo que el universo o lo que es, es decir, el ente, se puede describir como una esfera indivisible e inmutable y que toda referencia a cambio o diversidad es por sí misma contradictoria.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Se caracterizó por ser crítico a las concepciones pitagóricas. Por medio de “paradojas”, que iban dirigidas a los planteamientos pitagóricos siguientes: 	<ul style="list-style-type: none"> • Aporto a la matemática recursos de orden lógico, metodológico y hasta técnico. • Su proceso dicotómico se usa como recurso de demostración y el método de reducción al absurdo, es una consecuencia del principio de contradicción eje de sus raciocinios.
<p>Manténía que nada puede ser realmente afirmado excepto "lo que es" (el ente).</p>		<ul style="list-style-type: none"> • Desecha la concepción monádica de los pitagóricos.
<p>Zenón de Elea, discípulo de Parménides, intentó probar la unidad del ser afirmando que la</p>		

creencia en la realidad de cambio, la diversidad y el movimiento lleva a paradojas lógicas.

Las aporías de Zenón llegaron a ser enigmas intelectuales que filósofos y lógicos de todas las épocas posteriores han intentado resolver. El interés de los eleáticos por el problema de la consistencia racional propició el desarrollo de la ciencia de la lógica.

Paradojas de Zenón

a. Argumento dicotómico.

“El movimiento es imposible en efecto para que un móvil pueda recorrer una distancia dada , antes deberá haber recorrido la mitad de de ella, y antes de recorrer dicha mitad habrá tenido que atravesar la cuarta parte de la distancia dada, y antes de cubrir dicha cuarta parte deberá haber atravesado la octava parte de la

distancia dada, etc. Es obvio que retrocediendo de este modo, el móvil nunca iniciará el movimiento.

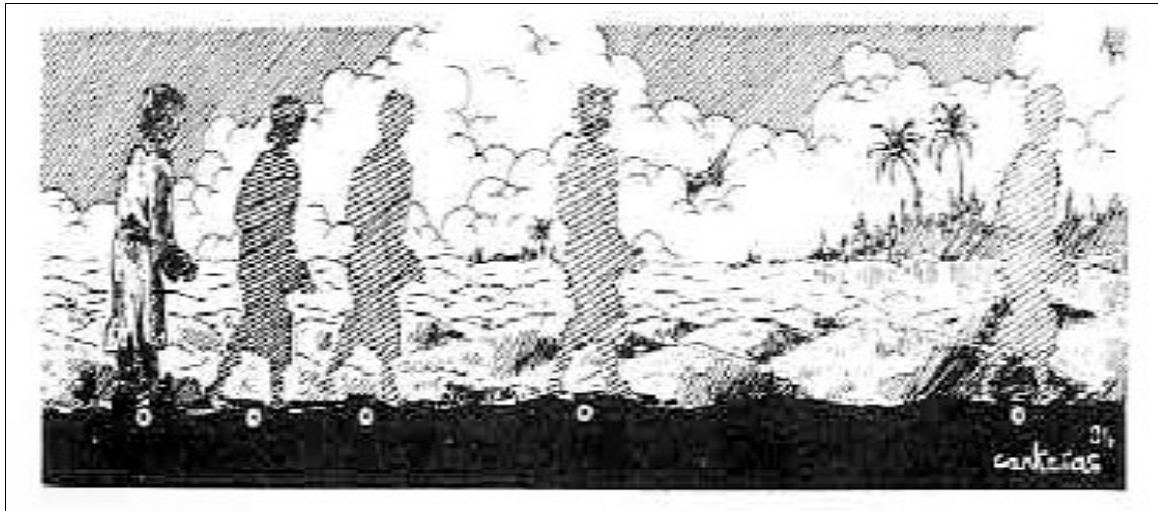


Gráfico 8. Argumento dicotómico

b. Paradoja de Aquiles

“Aquiles el del lo “pies ligeros” nunca podrá dar alcance a una lenta tortuga, aunque la velocidad de aquel sea muy superior a la del simpático quelonio.

Cuando Aquiles llegue al punto desde donde partió la tortuga, ésta habrá avanzado una determinada distancia, después, Aquiles deberá recorrer dicha distancia; mientras tanto la tortuga – de nuevo –

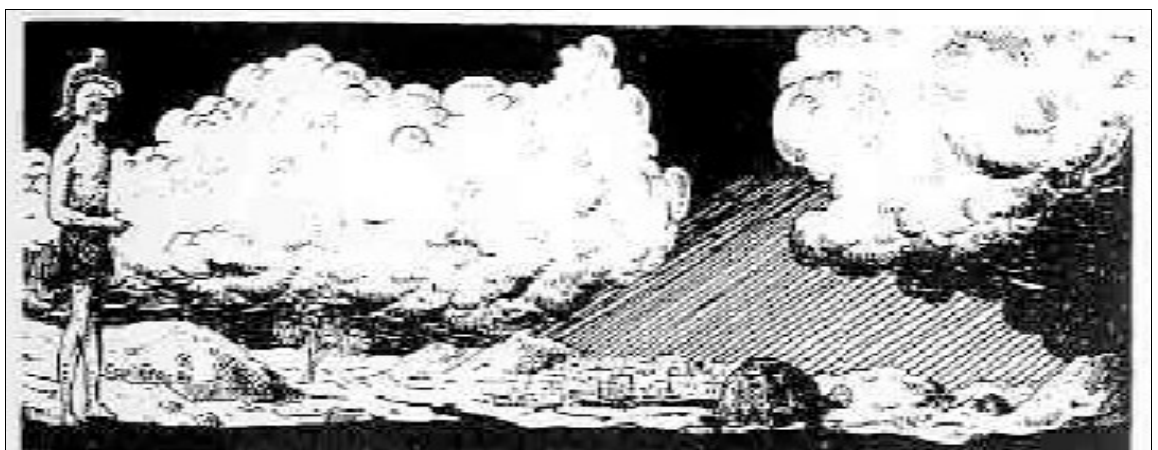


Gráfico 9. Paradoja de Aquiles

habrá tomado ventaja sobre él. Es claro que este proceso puede repetirse “Ad – infinitud”, con lo que el rápido corredor nunca podrá alcanzar al torpe animalito”.

Escuelas de Atenas: La Academia y El Liceo

La Academia		
Hechos relevantes	Máximo representante	Aportes
<ul style="list-style-type: none"> • Fue fundada por Platón en el siglo IV a.C. • En la entrada a la Academia se leía: “Nadie que ignore geometría penetre bajo mi techo” • En los diálogos de Platón aparece consideraciones matemáticas. • Platón sintetiza su amor a la matemática con la frase: “Dios geometriza constantemente” 	<p>Platón fue un filósofo griego, alumno de Sócrates y maestro de Aristóteles, de familia nobilísima y de la más alta aristocracia. Su influencia como autor y sistematizador ha sido incalculable en toda la historia de la filosofía, de la que se ha dicho con frecuencia que alcanzó identidad como disciplina gracias a sus trabajos. Durante su juventud luchó como soldado en las guerras del Peloponeso de las cuales Atenas salió derrotada, y el poder y la economía que ostentaba sobre el mundo griego cayó en las manos de Esparta. Entre sus obras más importantes se cuentan los diálogos La</p>	<p>Euclides asigna a Platón las siguientes contribuciones:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. El método analítico (método de demostración). 2. Una solución de la ecuación pitagórica. 3. El problema de la duplicación del cubo (dudosa).

<ul style="list-style-type: none">• La cosmología platónica influenciada de pitagorismo, como presenta en el Timeo, se fundamenta sobre las proporciones, los polígonos y los poliedros regulares (sólidos geométricos).• Los poliedros eran conocidos como “cuerpos platónicos”.• Con el desarrollo de su pensamiento contribuyeron a diferenciar el campo abstracto de los número y la aplicación concreta de ellos.	<p>República, en la cual elabora la filosofía política de un estado ideal; el Fedro, en el que desarrolla una compleja e influyente teoría psicológica; el Timeo, un influyente ensayo de cosmología racional influida por las matemáticas pitagóricas; y el Teeteto, el primer estudio conocido sobre filosofía de la ciencia.</p> <p>Fue fundador de la Academia de Atenas, donde estudió Aristóteles. Participó extensivamente en la enseñanza en la Academia y escribió sobre muy diversos temas filosóficos, especialmente los que trataban de la política, ética, metafísica y epistemología. Las obras más famosas de Platón fueron sus diálogos. Si bien varios epigramas y cartas también han sobrevivido. Se cree que todos los diálogos de Platón que se conocen son auténticos.</p>
--	---



Gráfico 10. Método analítico de Platón

Escuela de Cícico

Máximo representante	Aportes
<ul style="list-style-type: none"> ● Nació en Cícico alrededor del año 408 a.C. y murió en la misma ciudad por el año 355 a.C. Fue Astrónomo, geómetra y legislador. ● A lo largo de su vida viajó mucho, esto lo ayudó a consolidar sus conocimientos de ese momento ● Su vida la disfrutó entre la ciencia y la legislatura. 	<ul style="list-style-type: none"> ● Teoría de Proporcionalidad ● El método de exhaustión (equivalente al cálculo integral)

- Según Proclo, Eudoxo fue discípulo de Platón, y que luego se retiró a fundar su propia escuela en Cicico.
- Las cantidades inconmensurables fueron aceptas en Grecia gracias a Eudoxo.

Teoría de proporcionalidad

“Dos magnitudes tienen razón mutua cuando se puede encontrar un múltiplo de la menor que excede a la mayor”

\underline{a} Y \underline{b} TIENEN RAZÓN MUTUA ($a > b$)

⇕

$\exists n \in \mathbb{N}$ TAL QUE $n \cdot b > a$

“Se dice que la razón de una primera magnitud con una segunda es la misma que la de una tercera con una cuarta cuando, tomando cualquier múltiplo de la primera es mayor, igual o menor que el de la segunda, según que el de la tercera sea mayor, igual o menor que el de la cuarta”

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \forall m, n \in \mathbb{N} \begin{cases} \text{si } ma > nb \Rightarrow mc > nd \\ \text{si } ma = nb \Rightarrow mc = nd \\ \text{si } ma < nb \Rightarrow mc < nd \end{cases}$$

Método de Exhaustión

Es un método de demostración equivalente a una doble reducción al absurdo, según el cual “para demostrar que una cantidad A es igual a una cantidad B o que una figura A es equivalente a una figura B, basta probar que A no puede ser ni mayor ni menor que B”.

Se fundamenta así el “axioma de Eudoxo”

$$A=B \Leftrightarrow A \not< B \vee A \not> B$$

Los tres problemas clásicos

La cuadratura del círculo

La duplicación del cubo.

Trisección de un ángulo.

La solución sólo con regla y compás, tuvo que pasar más de 2200 años para demostrar que eran insolubles utilizando únicamente regla y compás.

La escuela de Alejandría

En esta etapa la matemática griega se caracterizó por su autonomía respecto a la filosofía, es la etapa donde se llega a un esplendor máximo. Se creó muchos centros de investigación como en Alejandría, Pérgamo y Rodas siendo sus máximos representantes Euclides, Arquímedes y Apolonio.

Con la muerte de Alejandro se modifica el ámbito territorial de Grecia, sin embargo en el campo cultural se vivió una expansión por oriente de los conocimientos, esto debido al derrumbe del imperio Persa.

Atenas perdiendo su importancia política pierde, a su vez, la supremacía cultural. A la par surgen otros focos culturales al oriente de Grecia. Uno de estos focos es Alejandría. En esta etapa las escuelas de filosofía y medicina se multiplican y las diferentes ciencias como la matemática, astronomía, geografía, mecánica cobran independencia y personalidad.

En Alejandría se construyen bibliotecas y museos, siendo la primera una de las más reconocidas hasta la actualidad, donde centenares de sabios y estudiosos enseñan, trabajan e investigan. A su vez se levantan observatorios para estudiar los fenómenos "celestes". En este ambiente, científicos de Alejandría se vinculan directa e indirectamente, entre ellos las tres figuras máximas de la matemática antigua: Euclides, Arquímedes y Apolonio.

Euclides:

Se presume que nació hacia el año 300 a.C. y que publicó numerosas obras científicas, destacándose entre ellas los célebres Elementos.

Los Elementos, es un conjunto de libros que sistematiza una parte de los conocimientos griegos acerca de la geometría. Recopila aportes de

culturas anteriores a las griegas, como la de Babilonia y Egipto, y sirve para las posteriores investigaciones en el campo de la matemática, por ejemplo sirve para la creación de una serie de geometrías no euclidianas.

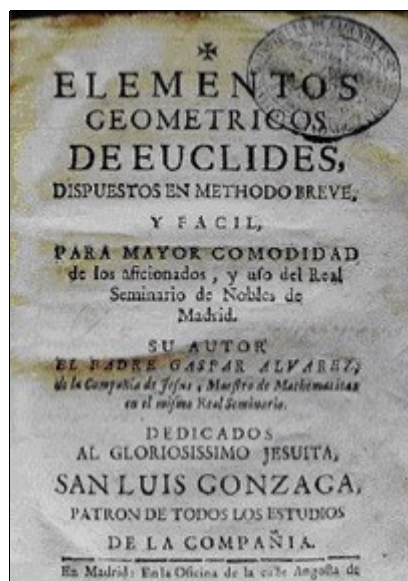


Gráfico 11. Los Elementos

De los trece libros que componen Los Elementos, los seis primeros corresponden a lo que se entiende como geometría elemental, donde se recoge las técnicas geométricas utilizadas por los pitagóricos para resolver problemas referidos a ecuaciones lineales y cuadráticas, e incluyen también la teoría general de las proporciones, atribuida a Eudoxo. Los libros del séptimo al décimo tratan de cuestiones numéricas (Teoría de Números) y los tres restantes se ocupan de la geometría de los sólidos, hasta culminar en la construcción de los

cinco poliedros regulares y sus esferas circunscritas, que había sido ya objeto de estudio de Teeteto.

En Los Elementos se hace un estudio deductivo científico de los conocimientos matemáticos, los principios que se toman como punto de partida son veintitrés definiciones (llamados términos), cinco postulados y cinco axiomas (llamados nociones comunes).

Los axiomas de Euclides:

- Por cualquier punto se puede trazar una recta que pasa por otro punto cualquiera.
- Toda recta limitada puede prolongarse indefinidamente en la misma dirección.
- Con un centro dado y un radio dado se puede trazar un círculo.
- Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
- Si una recta, al cortar a otras dos, forma los ángulos internos de un mismo lado menores que dos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado con que están los ángulos menores que dos rectos.

- Los dos primeros postulados establecen la existencia de la recta determinada por dos puntos.

El tercer postulado establece la existencia y la unicidad de una circunferencia dado su centro y su radio.

Los primeros cuatro postulados admiten la existencia de rectas y circunferencias.

El quinto postulado fija las condiciones para que dos rectas determinen un punto, cuya unicidad queda asegurada por el postulado ya citado.

Se observa que para los griegos la geometría estaba constituida esencialmente por el punto, la recta y la circunferencia.

Contenido de Los Elementos

Citamos algunos ejemplos

En el libro II se encuentran las primeras 10 proporciones de “álgebra geométrica” y traducen geoméricamente las propiedades algebraicas elementales de las sumas y productos. En notación actual sería:

$$m(a + b + c + \dots) = ma + mb + mc + \dots$$

$$(a + b)a = a^2 + ab$$

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$ab + \left(\frac{a+b}{2} - b\right) = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$(2a + b)b + a^2 = (a + b)^2$$

$$(a + b)^2 + a^2 = 2(a + b)a + b^2$$

$$4(a + b)a + b^2 = [(a + b) + a]^2$$

$$a^2 + b^2 = 2\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2\right]$$

$$(2a + b)^2 + b^2 = 2[a^2 + (a + b)^2]$$

En el libro VIII se exponen propiedades de las proporciones continuas y de las progresiones geométricas y continúan en el libro IX, donde figuran teoremas importantes de la aritmética de Los Elementos.

- La serie de los números primos es limitado.
- Suma de los términos de una progresión geométrica en la siguiente forma:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} = a_1 \frac{a_n - a_1}{a_2 - a_1}$$

Que en la actualidad sería

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

En el libro XII (sobre geometría del espacio) incluye los teoremas que exige el Método de Exhaustión para su demostración. Son las cuatro siguientes:

- Una pirámide es equivalente a la tercera parte de un prisma de igual base y altura.
- Dos círculos están entre sí como los cuadrados construidos sobre sus respectivos diámetros.
- Un cono es equivalente a la tercera parte de un cilindro de igual base y altura.
- Dos esferas están entre sí como los cubos construidos sobre sus respectivos diámetros.

Arquímedes

Nació alrededor del año 289 a.C. en Siracusa (la parte sur de Sicilia), hijo del astrónomo y matemático Fidas. De su padre aprendió cuestiones de ciencia, más adelante trabajando en Alejandría obtiene perfeccionamiento en sus conocimientos en colaboración con otros grandes matemáticos.

Sus inventos gozaban de admiración, por ejemplo aquello que facilitó agua a ciertas regiones del Nilo, donde no llegaba agua durante las inundaciones. En la última etapa de su vida participó en la defensa de su ciudad natal de los invasores romanos, confeccionando máquinas para la defensa e inventando armas.

La Matemática en Grecia Antigua

Durante el ataque y toma de Siracusa en 212 a.C., Arquímedes fue asesinado y su biblioteca e instrumentos saqueados. A raíz de ese hecho se cuenta la historia acerca de su asesinato:

“...un grupo de soldados romanos irrumpió en la casa de Arquímedes al que encontraron concentrado e inmutable trazando en la arena complicadas figuras geométricas ‘no toques mis círculos’ exclamo Arquímedes cuando uno de los soldados pisó sobre sus figuras. En respuesta, el soldado traspasó con su espada el cuerpo del anciano Arquímedes”.

Las obras de Arquímedes fueron escritas fundamentalmente en cartas. Hasta nosotros han llegado diez obras grandes y algunas más pequeñas de carácter matemático. La característica fundamental de sus obras matemáticas son aplicaciones de métodos matemáticos rigurosos en la mecánica y la física.

Numerosos inventos y descubrimientos mecánicos de Arquímedes son ampliamente conocidos como:

- El tornillo sin fin.
- Los sistemas de palancas.
- Bloques y tronillos para el levantamiento y movimiento de grandes pesas

Tratados teóricos como:

- *“Sobre el equilibrio de las figuras planas”*.
- *“Sobre los cuerpos que flotan”*.
- *“El libro de los soportes”*.

Una de sus hazañas matemáticas fue demostrar que, dando un círculo y la esfera en él inscrito, que las superficies así como los volúmenes de esos dos sólidos están en la misma proporción que la razón simple de 3:2.

Apolonio de Perga

Apolonio nació en Pérgamo alrededor del año 202 a.C. y falleció el 190 a.C. Estudió en Alejandría siguiendo la tradición de Euclides y escribió ocho libros, de los cuales los primeros cuatro abarcan la Teoría General de

las Cónicas y sus propiedades más importantes, son los únicos sobrevivientes del texto original. En cambio los otros cuatro se refieren a propiedades especiales y pueden considerarse como monografías-

En sus obras sobre las cónicas introduce el nombre de parábola, hipérbola y elipse a las secciones del cono. También se le atribuye la invención del reloj solar y es uno de los precursores de los descubrimientos astronómicos.

Además de las cónicas, su obra máxima, se le atribuye otros escritos científicos de los que se tiene noticia a través de los comentarios y posteriores, en especial a Pappus.

Otros escritos de Apolonio (colección de problemas)

- Sobre las secciones de razón.
- Sobre las secciones determinadas.
- Sobre las secciones del espacio.
- Problemas relacionados con lugares geométricos.

Los griegos clasificaban los lugares geométricos en tres tipos:

Lugares planos → Rectas y circunferencias.

Lugares sólidos → Sólidos.

Lugares lineales → Cónicas y otras líneas.

El atribuido a Apolonio fue el de lugares planos y otro denominado de De Las Inclinaciones (estudiaba los problemas de inserción) y Sobre Los Contactos (estudiaba numerosos casos particulares de un problema generalizado, que se conoce actualmente con el nombre de "Problema de Apolonio y que consiste en encontrar una circunferencia tangente a tres circunferencias dadas).

Por último, se le atribuye, también, los escritos sobre Los Elementos de Euclides, esto sobre los poliedros regulares, sobre la cuadratura del círculo, sobre un sistema de numeración, y una solución del problema de Délos (o problema de la duplicación del cubo).

Tolomeo:

Nació alrededor de 85 d. C. en Egipto y murió alrededor de 165 d. C. en Alejandría, Egipto.

Vivió y trabajó en Alejandría, Egipto (se cree que en la famosa Biblioteca de Alejandría). Fue astrólogo y astrónomo, actividades que en esa época estaban íntimamente ligadas. Es autor del tratado astronómico conocido como *Almagesto (El gran tratado)*. Se preservó, como todos los tratados griegos clásicos de ciencia, en manuscritos árabes (de ahí su nombre) y sólo disponible en la traducción en latín de Gerardo de Cremona en el siglo XII.

Herederó de la concepción del Universo dada por Platón y Aristóteles, su método de trabajo difirió notablemente del de éstos, pues mientras Platón y Aristóteles dan una cosmovisión del Universo, Ptolomeo es un empirista. Su trabajo consistió en estudiar la gran cantidad de datos existentes sobre el movimiento de los planetas con el fin de construir un modelo geométrico que explicase dichas posiciones en el pasado y fuese capaz de predecir sus posiciones futuras.

La ciencia griega tenía dos posibilidades en su intento de explicar la naturaleza: la explicación realista, que consistiría en expresar de forma rigurosa y racional lo que realmente se da en la naturaleza; y la explicación positivista, que consistiría en expresar de forma racional lo aparente, sin preocuparse de la relación entre lo que se ve y lo que en realidad es. Ptolomeo afirma explícitamente que su sistema no pretende descubrir la realidad, siendo sólo un método de cálculo. Es lógico que adoptara un esquema positivista, pues su Teoría geocéntrica se opone flagrantemente a la física aristotélica: por ejemplo, las órbitas de su sistema son excéntricas, en contraposición a las circulares y perfectas de Platón y Aristóteles.

Ptolomeo catalogó muchas estrellas, asignándoles un brillo y magnitud, estableció normas para predecir los eclipses.

Su aportación fundamental fue su modelo del universo: creía que la Tierra estaba inmóvil y ocupaba el centro del Universo, y que el Sol, la Luna, los

planetas y las estrellas, giraban a su alrededor. A pesar de ello, mediante la técnica del epiciclo-deferente, cuya invención se atribuye a Apolonio, trató de resolver con bastante éxito los dos grandes problemas del movimiento planetario:

1.- la retrogradación de los planetas y su aumento de brillo, mientras retrogradan.

2.- la distinta duración de las revoluciones siderales.

Sus teorías astronómicas influyeron en el pensamiento astrónomo y matemático científico hasta el siglo XVI.

Aplicó sus estudios de trigonometría a la construcción de astrolabios y relojes de sol. Y también aplicó el estudio de la astronomía al de la astrología, creando los horóscopos. Todas estas teorías y estudios están escritos en su obra *Tetrabiblon*.

Fue también un buen óptico y geógrafo. En el campo de la óptica exploró las propiedades de la luz, sobre todo de la refracción y la reflexión. Su obra *Óptica* es un buen tratado sobre la teoría matemática de las propiedades de la luz. Otra gran obra suya es la *Geografía*, en que describe el mundo de su época. Utiliza un sistema de latitud y longitud por lo que sirvió de ejemplo a los cartógrafos durante muchos años. Una de las ciudades descrita en esta obra es La Meca, en la Península Arábiga, a la que llama Makoraba.

El mundo de la música tampoco fue ignorado por Ptolomeo. Escribió un tratado de teoría musical llamado *Harmónicos*. Pensaba que las leyes matemáticas subyacían tanto los sistemas musicales como en los cuerpos celestes, y que ciertos modos y aun ciertas notas correspondían a planetas específicos, las distancias entre estos y sus movimientos. La idea había sido propuesta por Platón en el mito de la música de las esferas, que es la música no escuchada producida por la revolución de los planetas. Actualmente la NASA ha comprobado que el sol produce un sonido, no audible por el oído humano, ya que su frecuencia es muy alta.

La Matemática en Grecia Antigua

La unión de la música y la poesía es otra concepción griega sobre el género musical. Eran prácticamente sinónimos.

◦